捩れた安定性と向井変換

吉岡, 康太

代数幾何学シンポジウム記録
2001年度 pp.115-127

捩れた安定性と同形変換

吉岡康太（神戸大学理学部）

§1 Twisted stability

(X, H) を偏極多様体とする。

局所自由層 E_0 を固定する。

<u>Def.</u> X を曲面とするとき、連接層 E に対し
捩れた階数，次数，オイラー標数を次で def する。

$$\begin{cases} rk_{E_0} E := rk(E \otimes E_0^\vee) \\ deg_{E_0} E := deg(E \otimes E_0^\vee) = (c_1(E \otimes E_0^\vee), H) \\ \chi_{E_0}(E) := \chi(E \otimes E_0^\vee) \end{cases}$$

又一般の X の場合に

<u>Def.</u> 連接層 E の E_0-twisted Hilbert 多項式を

$$\chi_{E_0}(E(n)) := \chi(E \otimes E_0^\vee(n))$$
$$= a_0(E)\binom{n+d}{d} + a_1(E)\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots$$

で def する。

すると普通の安定性と同様，E_0-twisted stability が
次の様に def. できる。

Def. E : purely d-次元(連接)層が E_0-twisted stable (resp. semi-stable) とは

$0 \subsetneq {}^{\forall}F \subsetneq E$ に対し

$$\frac{\chi_{E_0}(F(n))}{a_0(F)} \underset{(\leqq)}{<} \chi_{E_0}(E(n)) \qquad n \gg 0$$

が成立する事とする。

- X が曲面で E : torsion free の場合は, E_0-twisted Hilbert 多項式の代わりに $\left\{\left(\frac{\deg_{E_0}(E)}{\mathrm{rk}_{E_0}(E)}, \frac{\chi_{E_0}(E)}{\mathrm{rk}_{E_0}(E)}\right)\right\}$ に辞書式順序を入れたもので stability をはかる事もできる。

Simpson の考えを使って次の定理が示せる。

Th E_0-twisted semi-stable sheaf のモジュライ空間

$$\overline{M}_X^{P,E_0} := \{E \mid E : E_0\text{-twisted semi-stable}, \ \chi_{E_0}(E(n)) = P(n)\} \big/ S\text{-同値}$$

が存在する。

さて twisted stability と普通の stability の関係であるが, まず容易にわかるのは, 次の関係である。:

μ-stable $\Rightarrow$ E_0-twisted stable $\Rightarrow$ E_0-twisted semi-stable $\Rightarrow$ μ-semi-stable

又 $E_0 = \mathcal{O}_X$ のときが通常の stability である。

今 X は曲面としよう。すると、E_0-twisted stability は

$\dfrac{c_1(E_0)}{\mathrm{rk} E_0} \in NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ にのみ依存する事がわかる。この事から

E_0-twisted stability は $\mathbb{Q}$-line bundle $\mathcal{O}_X\left(\dfrac{c_1(E_0)}{\mathrm{rk} E_0}\right)$ を $\otimes$ して(通常の)

stability を計ったもの ＝ 松本-Wentworth の stability

と一致する事がわかる。

注意　μ-stability は直線束の $\otimes$ で不変であるが、通常の stability は変化する。より詳しくは、

・H が一般の位置にあれば、twisted stability は E_0 に無関係に定まる。

・H が特別の位置にあれば、twisted stability は E_0 に依存し、この概念を導入する意味がある。

実際　元々は Donaldson 不変量の計量(偏極)依存性を解析するため特別な位置にある偏極をもつ場合の解析が必要となり、その道具として twisted stability という概念が導入されたわけである。

§2 向井格子

X を K3 曲面 又は abel 曲面 とする。

Def.（向井格子）

$H^{ev}(X, \mathbb{Z}) := \bigoplus_{i=0}^{2} H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ に pairing を

$$\langle x, y \rangle := -\int_X x^{\vee} \wedge y$$

$$= \int_X (x_1 \wedge y_1 - x_0 \wedge y_2 - x_2 \wedge y_0) \in \mathbb{Z}$$

で入れる。 ここで $x = (x_0, x_1, x_2) \in H^0 \oplus H^2 \oplus H^4$ に対し
$x^{\vee} = (x_0, -x_1, x_2)$

これを向井格子という。

向井格子は格子としては次の様になる：

$$(H^{ev}(X, \mathbb{Z}), \langle\ ,\ \rangle) = \begin{cases} (-E_8)^{\oplus 2} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\oplus 4} & X : K3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\oplus 4} & X : \text{abel} \end{cases}$$

Def（向井ベクトル）

E : X 上の連接層に対し

$$v(E) := ch(E)\sqrt{td_X}$$

$$= (\mathrm{rk} E,\ c_1(E),\ (\chi(E) - \varepsilon\, \mathrm{rk} E)\rho_X)$$

を E の向井ベクトルという ここで $\varepsilon = \begin{cases} 1 & X = K3 \\ 0 & X = \text{abel} \end{cases}$

※ $\int_X \rho_X = 1$.

すると Riemann-Roch の定理は次で与えられる。

Thm 連接層 E, F に対して $\chi(E,F)=\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i(E,F)$

とおくと，

$$\chi(E,F) = -\langle v(E), v(F)\rangle$$

Def. $v=(v_0, v_1, v_2)\in H^{ev}(X,\mathbb{Z})$ に対し $\begin{cases} \mathrm{rk}\, v = v_0 \\ c_1(v) = v_1 \end{cases}$ とおく。

Def. $v\in H^{ev}(X,\mathbb{Z})$ が $\mathrm{rk}\, v \geqq 0$ かつ $c_1(v)\in NS(X)$ とするとき

$$M_H(v) := \{ E \mid E : \text{stable w.r.t } H,\ v(E)=v \}$$

$$\overline{M}_H(v) := \{ E \mid E : \text{semistable w.r.t. } H,\ v(E)=v \} / S\text{-同値}$$

とおく。

このとき次が成立する。

Thm（向井）

$M_H(v)$ は非特異代数的スキームで，

$\dim M_H(v) = \langle v, v\rangle + 2$

更に $M_H(v)$ は正則シンプレクティック型式をもつ

この様に向井格子（ベクトル）はモジュライ空間の不変量を表わすのに適している。実際，適当な条件の下，変形型が $\langle v^2\rangle = \langle v, v\rangle$ で決まってしまう事がわかっている。
その過程で重要な役割を果たすのが，向井格子の同型(群)である。

向井格子の同型群 $O(H^{ev}(X,\mathbb{Z}))$

X を K3 曲面としよう。このとき次の写像は格子の同型である。

① $N \in \mathrm{Pic}(X)$ に対し

$$\begin{array}{cccc} T_N : & H^{ev}(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{ev}(X,\mathbb{Z}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & x \cdot \mathrm{ch}N \end{array}$$

② $H^{ev}(X,\mathbb{Z}) = H^2(X,\mathbb{Z}) \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ゆえ

$O(H^2(X,\mathbb{Z})) \subset O(H^{ev}(X,\mathbb{Z}))$ と思える。

③ $v_0 \in H^{ev}(X,\mathbb{Z})$, $\langle v_0^2 \rangle = -2$ に対し

$$\begin{array}{cccc} R_{v_0} : & H^{ev}(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{ev}(X,\mathbb{Z}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & x + \langle x, v_0 \rangle v_0 \end{array}$$

は v_0 に関する鏡映変換、よって格子の同型である。

次に述べる向井変換も格子の同型を導く。

§3 向井変換

X, Y を多様体、$D(\_)$ を有界かつ連接なコホモロジー層をもつ複体から成る導来圏とする。

$\mathcal{E} \in D(X \times Y)$ に対し、積分関手

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{\mathcal{E}} : & D(X) & \longrightarrow & D(Y) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & Rp_{Y*}(p_X^*(x) \overset{L}{\otimes} \mathcal{E}) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

を考える。

<u>Def</u> $\Phi_{\mathcal{E}}$ が圏同値を与えるとき，$\Phi_{\mathcal{E}}$ を向井変換という。

<u>例1</u>（自明な例）

$X = Y$ 　　 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\Delta}$ は明らかに圏同値を与える。

$(\Phi_{\mathcal{E}} = 1)$

より一般に $L \in \mathrm{Pic}(X)$ に対し

$\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\Delta} \otimes L$ とすれば $\Phi_{\mathcal{E}}(x) = x \otimes L$

となりこれも圏同値を与える。

<u>例2</u>（向井）

X : abel 多様体

$Y := \{ L \mid L : X$ 上の直線束，$c_1(L) = 0 \}$

とおくと，Y は X の dual abel 多様体

$\exists P = \bigcup_{y \in Y} P|_{X \times \{y\}}$: $X \times Y$ 上の直線束（普遍族），$y \longleftrightarrow P|_{X \times \{y\}}$

$\Phi_{\mathcal{E}} : D(X) \longrightarrow D(Y)$ は圏同値

<u>例3</u>（向井）

X : K3曲面とする。

E_0 : 単純かつ，変形をもたない，ベクトル束とする。

つまり

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\mathrm{Hom}(E_0, E_0) = \mathbb{C} \\
\mathrm{Ext}^1(E_0, E_0) = 0 \\
\mathrm{Ext}^2(E_0, E_0) = \mathbb{C}
\end{array}
\right. \quad \text{Serre dual}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& X \times X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X & & X
\end{tikzcd}
$$

このとき $p_1^*(E_0^\vee) \otimes p_2^*(E_0) \xrightarrow{ev} \mathcal{O}_\Delta$

は全射で $\mathcal{E} := \ker(ev)$ は局所自由でない層

$\Phi_\mathcal{E} : D(X) \longrightarrow D(X)$ は圏同値を与える。

これを向井の鏡映変換という。

さて $\Phi_\mathcal{E}^H : H^{ev}(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{ev}(Y, \mathbb{Q})$ を

$$\Phi_\mathcal{E}^H(x) := p_{Y*}\left(p_X^*(x) \cdot \mathrm{ch}\,\mathcal{E} \cdot p_X^*\sqrt{\mathrm{td}_X}\, p_Y^*\sqrt{\mathrm{td}_Y}\right)$$

で定めると、これは $\mathbb{Z}$ 上定義され、更に格子の同型となる。

又 Grothendieck-Riemann-Roch の定理により、次の可換図式を得る。

$$
\begin{tikzcd}
D(X) \arrow[r, "\Phi_\mathcal{E}"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D(Y) \arrow[d, "v"] \\
H^{ev}(X, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\Phi_\mathcal{E}^H"'] & H^{ev}(Y, \mathbb{Z})
\end{tikzcd}
$$

ところで例3の場合、$\langle v(E_0)^2 \rangle = -\chi(E_0, E_0) = -2$

∴ $v(E_0)$ は -2-vector となる。更に $\Phi_\mathcal{E}^H = -R_{v(E_0)}$ がわかる。

これが $\Phi_\mathcal{E}$ を鏡映変換と呼ぶ理由である。

向井変換における最も重要な定理はBridgelandの次の定理であろう。

<u>Thm</u> (Bridgeland)

- Y: X 上の sheaf の moduli space, $\dim Y = \dim X$
- 普遍族 $\mathcal{E}$ があって次をみたす。

$$* \quad \mathcal{E}|_{X\times\{y\}} \otimes K_X \cong \mathcal{E}|_{X\times\{y\}} \quad {}^{\forall} y \in Y$$

$$** \quad \mathcal{E}|_{\{x\}\times Y} \otimes K_Y \cong \mathcal{E}|_{\{x\}\times Y} \quad {}^{\forall} x \in X$$

このとき $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}: D(X) \longrightarrow D(Y)$ は圏同値を与える。

<u>Cor</u> 1 X が K3曲面又はabel曲面の場合は,

$\dim Y = \dim X$, ${}^{\exists}\mathcal{E}$: 普遍族

$\Longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$: 圏同値

<u>Cor</u> 2 同じ仮定の下

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{H}_{\mathcal{E}}: & D(X) & \longrightarrow & D(Y)_{op} \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \longmapsto & R\mathcal{H}om_{p_Y}(p_X^{*}(x), \mathcal{E}) \end{array}$$

は圏同値を与える。

さて，$\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ 又は $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ は導来圏の間の同値を与えるが，連接層の圏の間の同値を与えるわけではない。つまり，(安定)層が(安定)層に移るとは限らないわけである。

そこで考えられる事は，

- (層だけでなく) 考える対象を広げる。

  これについては稲場さんが導来圏の単純対象のモジュライ空間を構成している。詳しくは稲場さんの原稿をごらん下さい。

- いつ層が層に移るか？又その場合安定性は保たれるか？という問題も考えられる。

この問題を考えるにしても，対象を広げる事は見通しを良くするであろうと思われるが，ここでは直接的にこの問題へアプローチする事とする。

§4 捩れた安定性と向井変換

<u>仮定</u>(＊) $\mathcal{E}|_{3\times 3\times Y}$: stable w.r.t. $\hat{H}$.

ここで $\hat{H}$ は H から自然に誘導される Y 上の ample な直線束

又 X, Y, $\mathcal{E}$ は §3 Cor 1, 2 の仮定をみたすとする。

今 $\begin{cases} G_1 := \mathcal{E}|_{X\times 3\times 3} \\ G_2 := \mathcal{E}|_{3\times 3\times Y} \end{cases}$ とおく。

このとき次の Thm が成立する。

<u>Thm</u> 仮定(＊)をみたすとする。

E を $\deg_{G_1}(E)=0$ をみたす G_1-twisted semi-stable sheaf とする。このとき

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\mathcal{E}}^{i}(E)=0 & i\neq 1 \\ \mathcal{H}_{\mathcal{E}}^{1}(E)=\mathrm{Ext}^1_{p_Y}(p_X^*(E),\mathcal{E}) \text{ は } \widehat{H} \text{ に関し } G_2\text{-twisted semi-stable} \end{cases}$$

特に $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ は同型

$$\overline{M}_H^{G_1}(v) \xrightarrow{\sim} \overline{M}_{\widehat{H}}^{G_2}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}}^H(v))$$

を誘導する。

群 $O(H^{ev}(X,\mathbb{Z}))$ を使って（残念ながら今のところこの群の作用があるわけではない）次が示せる。

Cor $\overline{M}_H(v)$ は空でなければ正規代数多様体

特に既約である。ただし H は一般の偏極

（向井ベクトルを $v=m(1,0,-n)$ の場合に帰着させる）（文献②参照）

問題 $\overline{M}_H(v)\neq\phi \iff \langle v^2\rangle\geq -2\varepsilon$

（H：一般）

を（なるべく易しく）示せ

知られている事　X：abel 曲面のときは OK

X：K3 曲面の場合は $\begin{cases} \mathrm{rk}\, v>0 \\ \mathrm{rk}\, v=0,\ c_1(v)=\mathrm{nef} \end{cases}$

$\Rightarrow$ OK.

<u>Cor</u> $\deg_{G_1}(E)=0$ のとき $\overline{M}_H(v)$ と $\overline{M}_{\hat{H}}(\mathcal{H}^H_{\mathcal{E}}(v))$ の関係は Mumford-Thaddeus type flip で与えられる。：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\overline{M}_H(v) \arrow[dr] & & \overline{M}^{\alpha_2}_H(v) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \overline{M}_{\hat{H}}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}}(v)) \arrow[dl] \\
& \overline{M}^{\alpha_1}_H(v) & & \cdots & &
\end{tikzcd}$$

今 $\deg_{G_1}(E)=0$ の場合を考えたが、他の場合はどうであろうか？

- $\deg_{G_1}(E)=1$ （あるいは最小 >0 ）のとき.

* $\mathcal{E}$：局所自由 $\Longrightarrow$ OK　　$\chi_{G_1}(E)>0 \Rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$: isom

$\chi_{G_1}(E)\leq 0 \Rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{E}^\vee}$: isom

（文献④）

* $\mathcal{E}$：局所自由でない $\Longrightarrow$ "一般化された" 向井の基本変換になる。

（Markman）

（文献③）

- 他の次数では？？

実は反例あり.

- 漸近的挙動

E：連接層とすると、　$H^i(X,E(m))=0$ $m>0$, $i>0$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}(E(m))$, $m\gg 0$ は連接層となる。

問題　安定性は保たれるか？（適当な twisted semi stability
は保たれるか？）

今のところわかっているのは次の事実だけである。

Thm（文献①）　$\mathrm{rk}\,E \le 2$ ならOK.

参考文献

K. Yoshioka：① math. AG/0112267
② math. AG/0106118
③ Crelle 515, 97–123
④ math. AG/0009001 (Math. Ann. 321, 817–884)

他の文献は④の文献をみて下さい。